数理解析研究所講究録
1140 巻 2000 年 131-135

Derived equivalences in symmetric groups

千葉大学大学院自然科学研究科
功刀　直子 (Naoko Kunugi)

1 Introduction

有限群のモジュラー表現において, 次の重要な予想がある.

Conjecture 1.1 (Broué)([1, 2] 参照) G を有限群とし, P をその Sylow p- 部分群, $N_G(P)$ を P の G における正規化群とする. P がアーベル群であるとき, G の主ブロックと $N_G(P)$ の主ブロックは derived equivalent ではないだろうか.

この問題をとくに対称群のブロックの場合に考える. 現在までにわかっている結果の紹介、それに対して考察したことなどを述べる.

以下 A, B を有限群 G, H のブロックとする. A, B の derived category $D^b(A)$, $D^b(B)$ が triangulated category として同値のとき A と B は derived equivalnent であるという. このとき A と B の間ではいろいろな性質が保たれる.

Theorem 1.2 (Rickard[7] 参照) 次は同値である.
(1) A と B は derived equivalent である.
(2) 次を満たす上下に有界な (A, B)-bimodule の complex X が存在する.
(i) X の各項は A-module, B-module とみて projective である.
(ii) (A, A)-((B, B)-)bimodule の complex の homotopy category において,
$X \otimes_B X^* \cong A$ $(X^* \otimes_A X \cong B)$が成立する.

(2) の条件を満たす complex を A と B の間の Rickard complex とよぶ. A と B が derived equivalent であれば, Morita type の stable equivalent であることが知られている. 逆に Morita type の stable equivalence が与えられているとき derived equivalent になる十分条件が Okuyama, Rouquier, Rickard らにより与えられている ([6], [8] などを参照).

2 対称群のブロックについて

$(K, \mathcal{O}, F)$ を p-modular system とする. S_n を n 次対称群, C_n を n 次巡回群とする.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ が n の分割であるとき $\lambda \vdash n$ と書く. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ は $\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \cdots = \lambda_{i+p} (> 0)$ となる i が存在するとき p-singular といい, そうでないとき p-regular という. $R \in \{K, F\}$ 上で Specht module S_R^λ が定義される. とくに λ が p-regular のとき $D_F^\lambda := S_F^\lambda / radS_F^\lambda$ とおく. $\{S_K^\lambda | \lambda \vdash n\}$ は simple KS_n-module 全体であり, $\{D_F^\lambda | \lambda \vdash n, p\text{-regular}\}$ は simple FS_n-module 全体である. λ からすべての l-hook(hooklength l の hook) を除いたものを λ の l-core といい, そのときに除いた l-hook の数を l-weight という (以上詳しくは [4] を参照). 2 つの simple module が同じブロックに属するための条件が次で与えられている.

Theorem 2.1 $\lambda, \mu \vdash n$ とする.
(1) S_K^λ と S_K^μ が同じ p-block に属するための必要十分条件は λ と μ が同じ p-core をもつことである.
(2) λ, μ はともに p-regular とする. D_F^λ と D_F^μ が同じ p-block に属するための必要十分条件は λ と μ が同じ p-core をもつことである.

したがって対称群のブロックは p-core ρ と p-weight w により index 付けられる. $B^{\rho,w}$ とかく ($\rho \vdash n$ のとき, $n + pw$ のブロックとなる). $B^{\rho,w}$ の defect group がアーベル群になるための必要十分条件は $p > w$ となることである. このとき defect group は位数 p^w の elementary abelian となる. Broué 予想より弱い予想として次が知られる.

Conjecture 2.2 $p > w$ のとき $B^{\rho,w}$ と $B^{\tau,w}$ は derived equivalent ではないだろうか.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r) \vdash n$ と $t \geq r$ に対し, 集合 $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots \gamma_t\}$

$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda_i - i + t & i \leq r \\ -i + t & i > r \end{cases}$$

を λ に対する (t 個の元からなる) β-set という. とくに $t = r$ の場合は λ の 1 列目の hooklength の集合である. 逆に非負整数の有限集合 $\{\gamma_1, \cdots \gamma_t\} (\gamma_1 > \cdots > \gamma_t > 0)$ があれば, $\lambda_i = \gamma_i + i - t$ として partition $\lambda = (\lambda_1, \cdots)$ が定まる.

Γ を λ に対する β-set とする. 自然数 l に対し, $m - l \geq 0, m - l \notin \Gamma$ となる $m \in \Gamma$ が存在することと, λ が l-hook を持つことは同値であり, $\Gamma' = (\Gamma \backslash \{m\}) \cup \{m - l\}$ は λ からある l-hook を除いた partition に対する β-set となる. l-hook を取り除

いたり, l-core について知るために, β-set を l-abacus に表す. l-abacus とは

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & l-1 \\ l & l+1 & \cdots & 2l-1 \\ 2l & 2l+1 & \cdots & 3l-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}$$

のように数字を配列したもので, β-set の元を ◯ をつけて表す. λ に対する β-set を l-abacus 上で表示したときに, ◯ があるひとつ上が空いていれば, λ には l-hook があり, それをひとつ上にずらすことは l-hook をひとつ除くことに対応する. ここでは p-modular 表現を考えているので, p-abacus で考える. p-core を p-abacus へ表すと, 各列ごとに ◯ がすべて上につまった型になる.

Definition 2.3 $B^{\rho,w}$, $B^{\tau,w}$ をそれぞれ S_n, S_{n-k} のブロックとする (ただし $k>0$ とする). $\rho=(\rho_1,\cdots\rho_r)$ とし, Γ^ρ, Γ^τ をそれぞれ $(r+pw)$ 個の元からなる ρ, τ に対する β-set とする. また Γ^ρ_j, Γ^τ_j をそれぞれ Γ^ρ, Γ^τ の p-abacus の j 列目にある ◯ の数とする. ある $i>1$ に対して,

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_j &= \Gamma^\tau_j \quad j \neq i, i-1 \\ \Gamma^\rho_i &= \Gamma^\tau_{i-1} \\ \Gamma^\rho_{i-1} &= \Gamma^\tau_i \end{aligned}$$

となるとき $B^{\rho,w}$ と $B^{\tau,w}$ は $[w,k]$-pair であるという.

Remark 2.4 p-core ρ に対して p-core の sequence $\rho=\rho^0$, $\rho^1,\cdots,\rho^m=\emptyset$ と自然数の sequence k_1, $k_2,\cdots,k_m$ が存在して, $B^{\rho^i,w}$ と $B^{\rho^{i+1},w}$ は $[w,k_i]$-pair となる.

したがって Conjecture 2.2 を考えるにあたり各 $[w,k]$-pair の関係を調べればよい.

Theorem 2.5 (Scopes [9]) $w\leq k$ のとき $[w,k]$-pair をなす 2 つのブロックは Morita equivalent である.

$B^{\rho,w}$ と $B^{\tau,w}$ を $[w,k]$-pair とする. $w\leq k$ の条件は $B^{\rho,w}$ に属する S^λ_K に対し, $\overline{\lambda}$ が存在して, $S^\lambda_K{\downarrow}_{B^{\tau,w}}=k!S^{\overline{\lambda}}_K$ となるための条件である. これより $D^\lambda_F{\downarrow}_{B^{\tau,w}}=k!D^{\overline{\lambda}}_F$ となり, さらにこの重複度をおとすようにして対応がつき, Morita equivalent(とくに Puig equivalent) となる.

$w>k$ のときは一般に Morita equivalent とはならない. $w=2$ のときには Rickard により次が示されている.

Theorem 2.6 (Rickard) $B^{\rho,2}$ と $B^{\tau,2}$ は $[2,1]$-pair であるとすると, derived equivalent である.

したがって $w=2$ のとき Cnjecture 2.2 は成立している．また Conjecture 1.1 も成立することが Chuang により示されている ([3] 参照).

以下，$w \geq 3$ とし，$k < w < p$ とする．$G = S_n$, $H = S_{n-k}$ とし，$B^{\rho,w}$, $B^{\tau,w}$ はそれぞれ G, H のブロックで $[w,k]$-pair として考察する．$1 \leq m \leq w$ にたいし，$x_m = (12\cdots p)(p+1\cdots 2p)\cdots((m-1)p+1\cdots mp) \in H \leq G$ とする．$C_G(x_m) = (C_p \wr S_m) \times S_{n-mp}$, $C_H(x_m) = (C_p \wr S_m) \times S_{n-k-mp}$ であり，$\mathrm{Br}_{\Delta(\langle x_m\rangle)}(B^{\rho,w}) = F[C_p \wr Sm] \otimes_F B^{\rho,w-m}$, $\mathrm{Br}_{\Delta(\langle x_m\rangle)}(B^{\tau,w}) = F[C_p \wr Sm] \otimes_F B^{\tau,w-m}$ である．ここで，$B^{\rho,w-m}$ と $B^{\tau,w-m}$ は $[w-m,k]$-pair となっていることに注意する．したがって，すべての $1 \leq m \leq w$ に対して，$\mathrm{Br}_{\Delta(\langle x_m\rangle)}(B^{\rho,w})$ と $\mathrm{Br}_{\Delta(\langle x_m\rangle)}(B^{\tau,w})$ が Morita equivalent になるのは，$k = w-1$ のときのみである．したがって，$k = w-1$ のときのみ Broué の定理 ([2] Thoerem 6.3) が適用できて $B^{\rho,w}$ と $B^{\tau,w}$ は Morita type の stable equivalent である．とくに $B^{\tau,w}$ は $S_{n-k} \times S_k$ のブロックと思うことができて，その block idempotent を e とすれば $(B^{\rho,w}, B^{\tau,w})$-bimodule $M = B^{\rho,w}\cdot e$ が stable equivalence を与える．以下ではさらに Definition 2.3 における i を $i > 2$ と仮定しておく．[10], [5] などを参考にして，ブロック間の induction,restriction を計算し，$S_k^\lambda\downarrow_{B^{\tau,w}} = k!S_K^{\overline{\lambda}}$ とならない partition の中で辞書式の順序で最大のものを α とし，$S_K^{\overline{\lambda}}\uparrow^{B^{\rho,w}} = k!S_K^{\lambda}$ とならない partiotion の中でやはり最大のものを $\overline{\alpha}$ とする．P_α, $P_{\overline{\alpha}}$ をそれぞれ，D_F^α, $D_F^{\overline{\alpha}}$ の projective cover とすれば，

$$0 \longrightarrow P_\alpha \otimes P_{\overline{\alpha}}^* \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が $B^{\rho,w}$ と $B^{\tau,w}$ の間の Rickard complex を与え，$[w, w-1]$-pair をなす 2 つのブロックは derived equivalent であることがわかる．

参考文献

[1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, Astérisque 181-182 (1990), 61-92.

[2] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras, in Proc. ICRA (Ottawa,1992), Finite Dimensional Algebras and Related Topics (eds. Dlab and Scott) (1993), pp.1-26.

[3] J. Chuang, The derived categories of some blocks of symmetric groups and a conjecture of Broué, J. Algebra 217 (1999), 114–155.

[4] G. D. James and A. Kerber, The representation theory of the symmetric group, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 16 Addison-Wesley, Reading, MA 1981.

[5] S. Martin and R. Russell, Defect 3 blocks of symmetric group algebras, J. Algebra 213 (1999), 304–339.

[6] 奥山哲郎, Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, 第6回多元環の表現論シンポジウム報告集 (1996 館山)(越谷重夫, 佐藤真久編) pp.108-122.

[7] J. Rickard, Splendid equivalences: derived categories and permutation modules, Proc. London Math. Soc. 72(1996), 331–358.

[8] R. Rouquier, From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect, Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note ser., vol. 212, Cambridge Univ. Press, Cambrigde, 1995, pp.512-523.

[9] J. Scopes, Cartan matrices and Morita equivalences for blocks of the symmetric groups, J. Algebra 142 (1991), 441-455.

[10] J. Scopes, Symmetric group blocks of defect two, Quart. J. Math. Oxford (2) 46(1995), 201–234.